“Interpolación”

Planeación didáctica del tema

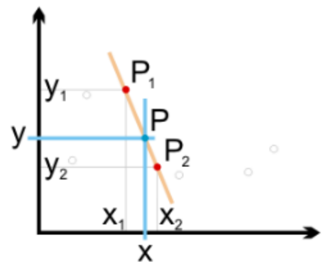
<table>
<tr><th>Tópicos</th><th>INTERPOLACIÓN</th></tr>
<tr><td>Tema</td><td>Diferencias finitas (Método de Interpolación de Newton)
Método de Lagrange</td></tr>
<tr><td>Objetivos específicos</td><td>Tomar decisiones fundamentadas sobre la elección de métodos típicos de solución, por el comportamiento de datos tabulados que pueden aproximarse a un polinomio de grado n.
Implementar algoritmos de aproximación polinómica de Diferencias finitas y el Método de Lagrange.
Emplear software indicado y/o en su caso diseñar programas especializados para hacer corridas.
Interpretar resultados en el contexto del problema.</td></tr>
<tr><td>Niveles de comprensión</td><td>
<table>
<tr><th>Niveles</th><th>Evidencia de aprendizaje</th></tr>
<tr><td>1. Reproducción de conocimiento</td><td>Distingue el concepto de uso de interpolación en la vida real.
Evidencia de aprendizaje 3.1</td></tr>
<tr><td>2. Aplicación básica de habilidades y conceptos</td><td>Construye una representación que muestra como se ve y/o funciona un fenómeno/ situación.
Aplica un método numérico en una aplicación rutinaria
Clasifica una serie de etapas y decide por un método numérico
Escribe una explicación de un tópico para otros
Evidencia de aprendizaje 3.2, 3.2, 3.4, 3.5, 3.6</td></tr>
<tr><td>3. Desarrollo de un plan o una secuencia de pasos lógicos</td><td>Explica y conecta ideas, usando evidencia que lo sustente
Construye una representación que muestra como se ve y/o funciona un caso
Cita evidencia y desarrolla un argumento lógico para hacer conjeturas.
Resuelve el problema y analiza escenarios distintos
Evidencia de aprendizaje 3.6, 3.7</td></tr>
<tr><td>4. Pensamiento matemático (razonamiento y abstracción)</td><td>Ingeniería en Computación: Sintetiza ideas en nuevas representaciones (elaborar pseudocódigo, diagrama de flujo y programa en código).
Evidencia de aprendizaje 4.7a, 4.7b
Ingeniería Civil, Industrial, Mecánica, Eléctrica-Electrónica:
Sintetiza ideas en nuevas representaciones (elaborar pseudocódigo y diagrama de flujo).</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

	Conduce una investigación sobre el problema resuelto. **Evidencia de aprendizaje 4.7a, 4.7b**
Recursos digitales:	Ejecutables elaborados para el proyecto PAPIME Método de Lagrange De apoyo: https://www.youtube.com/watch?v=oz5G3XDVkwc https://www.youtube.com/watch?v=9m7CutqZPtc https://www.youtube.com/watch?v=2nju-o6t3kQ https://es.symbolab.com/solver
Test de reposición	Ponte a prueba
Tema para participación en foro	FORO: Presenta a tus compañeros, al menos tres casos/aplicaciones del mundo real, donde se requiera de la interpolación y los nombres de los métodos usados para su solución.
Encuesta de satisfacción	Preguntas de reflexión
Referencias bibliográficas	Chapra, S., & Canale, R. (2006). *Métodos Numéricos para Ingenieros*. México, D.F: McGraw-Hill. D'Alessio, V. (2018). Interpolación Lineal. Octubre, 2019, de Lifeder Sitio web: https://www.lifeder.com/interpolacion-lineal/ Levy, D. (2014). Interpolation. Octubre 2019, de Wiki.math Sitio web: https://wiki.math.ntnu.no/_media/ma8502/2014h/interpolation-levy.pdf?fbclid=IwAR0IeSymtCKWjbNtu9NYj4CQxETAKGEKtTWX4jEamXb917ZQl8dMD8_NN28 Onandía, G. (2017). Problemas de interpolación lineal y cuadrática. Octubre, 2019, de IES Bajo Cinca Sitio web: http://iesbajocinca.catedu.es/wp-content/uploads/2017/07/1ºBato-CS-Problemas-Interpolacion.pdf

Contenido

Presentación

La interpolación es un método numérico, cuyo propósito es el de estimar un valor desconocido entre dos valores conocidos de una tabulación (función).



En la figura se puede apreciar un tipo de interpolación, llamada *lineal* en la cual se aprecia que dado un valor de *x*, se pretende encontrar su correspondiente valor de y.

Así que, por interpolar se entenderá **estimar un valor desconocido en algún punto de una función**, mediante el cálculo de un factor de proporcionalidad con base en los valores conocidos de la función.

Las intenciones educativas del presente texto, son las de presentar actividades de aprendizaje, a partir de escenarios concretos en el campo de la ingeniería, que le permitan al estudiante formalizar conceptos de interpolación polinomial, tomar decisiones en el momento de resolver un problema real y/o abstracto, y emplear algoritmos, aplicando o diseñando software necesario.

El texto está organizado por niveles de aprendizaje, del uno al cuatro, en donde se entremezclan cápsulas explicativas sobre la naturaleza de la interpolación con la presentación de solución de problemas, paso a paso, que se describen con modelos matemáticos, principalmente, aquellos que se presentan en el desempeño profesional.

Consecuentemente, en cada nivel, existen actividades de aprendizaje interactivas que coadyuvan al desarrollo de habilidades de razonamiento matemático y estrategias de solución en un entorno de ingeniería, con ejercicios, ligas a sitios de internet e incluso, se proporciona software didáctico, para hacer más significativo y efectivo el aprendizaje.

Cada nivel tiene un propósito, tal es el caso que el nivel 1, está referido a la adquisición del conocimiento. En este nivel el estudiante requiere recordar sus conocimientos previos y ubicar en forma concreta fenómenos proclives a ser tratados con Métodos Numéricos. El nivel 2 trata del uso de conceptos y habilidades cognitivas que permitan la aplicación de la interpolación.

El nivel 3, tiene una orientación estratégica para razonar acerca de los algoritmos, y para tomar decisiones en la solución de problemas, es un nivel de análisis y síntesis. Finalmente, el nivel 4, va hacia el diseño, tiene una orientación en la que el estudiante use lo que ha aprendido, no solo en la asignatura de Métodos Numéricos, también en otros contextos académicos y externos, que se refleje en su creación.

Las actividades aquí presentes constituyen un apoyo a la docencia, cuyo diseño también favorece el trabajo colaborativo en un intento de emular el futuro profesional y, por tanto, conduzcan a que el estudiante valore la importancia del conocimiento y su comportamiento ético y profesional.

Objetivos específicos

Los objetivos específicos de esta sección son:

Tomar decisiones fundamentadas sobre la **elección de métodos típicos de solución**, por el comportamiento de datos tabulados que pueden aproximarse a un polinomio de grado *n*. Implementar algoritmos de aproximación polinómica de **Interpolación de Newton (Diferencias Finitas) y el Método de Lagrange**. Emplear **software indicado** y/o en su caso **diseñar programas** especializados para hacer corridas. **Interpretar resultados** en el contexto del problema.

¿Qué vas a aprender?

A continuación, se presenta una explicación de los objetivos de aprendizaje.

Debido a que en la práctica de ingeniería se favorece el involucramiento con la solución de problemas, un aspecto importante radica en cómo manejar datos experimentales que se presentan en forma discreta y con la necesidad de estimar un valor desconocido en algún punto de una función.

La interpolación es un proceso que consiste en aproximar una función a partir de un conjunto de puntos de datos discretos, y buscando que esa función aproximada pase por todos los puntos de datos dados (es decir, reproduzca los puntos de datos exactamente), lo cual posteriormente permite determinar el valor, o los valores de interés.

El primer objetivo se refiere a lo siguiente: Se tendrán situaciones en la que la presentación de los datos tabulados, se deberá elegir en alguno de los casos siguientes:

a. Se requieren estimar resultados (y) entre puntos de datos muestreados (x).
b. Se tienen resultados (y) y se requiere estimar el valor de la variable independiente (x).
c. Se requieren estimar resultados más allá del rango cubierto por los datos existentes, lo cual recibe el nombre de *extrapolación*.
d. Se requiere generar una función, a partir de todos los puntos muestreados.

Los casos a), b) y c) corresponden a la aproximación de funciones, es decir; determinar una función, perteneciente a una clase prefijada de funciones, que mejor aproxima a una función dada, para obtener el valor de interés.

Con respecto al caso d), corresponde a construir una función a partir de un número dado de valores conocidos y considerados como exactos, o al menos, ajustar una dependencia funcional que mejor represente al conjunto conocido de dados.

Los casos presentados pueden resolverse con la interpolación polinómica, en la cual se busca generar un polinomio de grado único como máximo *n-1* que pasa por *n* puntos de datos. Algunos de esos métodos son la **Interpolación de Newton y la de Lagrange.**

Como método numérico, es indispensable **programar y/o usar un software** para las fórmulas de Interpolación de Newton y de Lagrange, así como **reinterpretar** los resultados.

Lo que debes saber antes de comenzar

Existen diferentes tipos de interpolación, y el más simple se llama *interpolación lineal*.

Para ilustrar su proceso, se tomarán dos valores numéricos dados en una línea recta. Por ejemplo,

$$x_1 = 8$$
$$x_2 = 4$$

De los dos valores dados, se puede estimar que un valor intermedio es $x_{intermedio} = 6$

Otro ejemplo, se trata de enumerar una serie de puntos de datos conocidos, buscando el valor desconocido, mediante el cálculo de la relación entre los puntos dados:

x	y
20	100
40	¿?
80	700

Observe que los valores en la columna derecha, el primero (100) y el tercero (700) se incrementan en un valor de 600. Con respecto a los valores de la columna derecha, los valores primero (20) y tercero (80) en la columna izquierda aumentan en 60, se puede determinar que un aumento de 10 en la columna izquierda es igual a un aumento de 100 en la derecha columna. Por lo tanto, el valor de y=300.

Si bien la interpolación lineal es una buena forma de estimar un valor desconocido, se supone que los puntos de datos observados continúan en una ruta lineal fácilmente predecible. También supone que el modelo de datos utilizado para llegar a los valores es correcto.

Autoevaluación diagnóstica

Interpolación, es el proceso de aproximar un valor a la variable dependiente en un intervalo de valores de la variable independiente conocidos como **argumento.**
Para los datos tabulados en la tabla siguiente, aplica la fórmula de interpolación lineal $y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_2}(x - x_0) + y_0$ a los argumentos, presentados en la segunda tabla.

i	x_i	y_i
0	0	2.2500
1	1	1.6420
2	2	1.3183
3	3	1.2786
4	4	1.5232
5	5	2.0519
6	6	2.0519

x_i	y_i
0.5	
1.3	
2.1	
3.9	
4.7	
5.4	
6.9	

Como ejemplo, se procede a resolver el primer dato solicitado: el valor de y, cuando *x=0.5.*

La asignación de los subíndices x_i, y_i, depende de la ubicación del dato a interpolar.

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_2}(x - x_0) + y_0$$

$$y = \frac{1.6420 - 2.2500}{1 - 0}(0.5 - 0) + 2.2500$$

i	x_i	y_i
0	0	2.2500
	0.5	1.946
1	1	1.6420

Graficar los datos de la primera tabla en color rojo, y los valores interpolados en color azul.

Investiga y define

a. ¿A qué se refiere la siguiente frase "con la interpolación se genera un polinomio de grado único como máximo *n-1* que pasa por *n* puntos?

____

____

b. Presenta un ejemplo de interpolación y otro de extrapolación

____

____

c. Definir un error de interpolación inherente a los datos

____

____

d. Definir un error de interpolación por redondeo de los datos

____

____

e. Definir un error de interpolación por truncamiento de los datos

____

____

f. Definir un error de interpolación absoluto y un error relativo

____

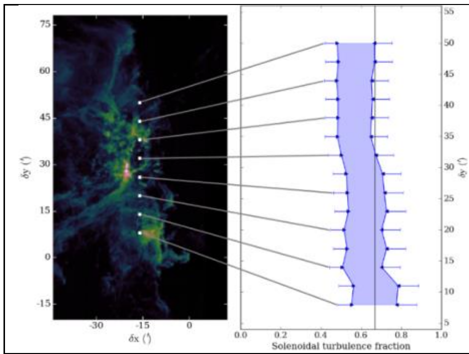
____

NIVEL 1

¿En qué situaciones se emplea la interpolación?

En aplicaciones prácticas, la interpolación lineal se puede utilizar en múltiples casos, como se presenta a continuación.

1er caso. Mapeo de una fotografía

	Cuando se toma una fotografía con una cámara digital, el producto es una malla *n*m* con valores de color por cada píxel. Se podría pensar en la fotografía como una función continua. En una fotografía del espacio, los colores representan elementos químicos, y si en caso, se desconoce el valor de un color, la interpolación ubica la posición con respecto al color.

Esta aplicación busca localizar un determinado color en la fotografía identificando la posición y característica del píxel.

En el ejemplo, lo datos provienen de la posición del color pixel y de la cual se busca la posición que se encuentra con respecto a un formato estandarizado de medidas. Así que, dada una función continua en un intervalo cerrado, se puede aproximar mediante un polinomio en cada punto del intervalo.

2° caso. Estimación de dosis de medicina

	En la medicina, se generan fármacos para medicamentos. Se puede monitorear la respuesta de un paciente a diferentes dosis de un medicamento. Sin embargo, solo se puede predecir lo que sucederá en forma casi inmediata, con una dosis que no se ha probado explícitamente.

La extrapolación numérica supone el curso de acontecimientos que ocurrirán, lo cual puede soportar la definición de dosis que se utilizará para una población.

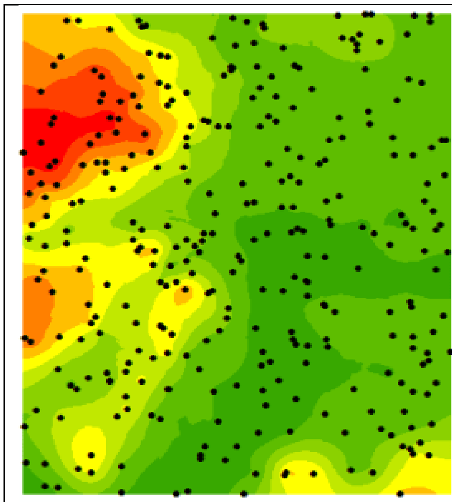
3er caso. Pago (o ingreso) periódico desconocido

Plazo	Tasa	Intereses mensuales	Total de intereses pagados
15 años	6.50%	$1,742.00	$113,625
30 años	6.85%	$1,311	$271,390

En aplicaciones prácticas, la interpolación lineal se puede utilizar para determinar cálculos como los pagos de tasas de interés a medio mes. Debido a que muchas tasas de interés se determinan en uno o dos meses, estos valores son conocidos. Mediante la interpolación, un analista financiero puede estimar la tasa para un período que se encuentra dentro de ese rango.

Para obtener estimaciones precisas de tasas de intereses o de crecimiento, se puede aplicar la interpolación, como un método para estimar valores intermedios desconocidos.

4° caso. Interpolación climática



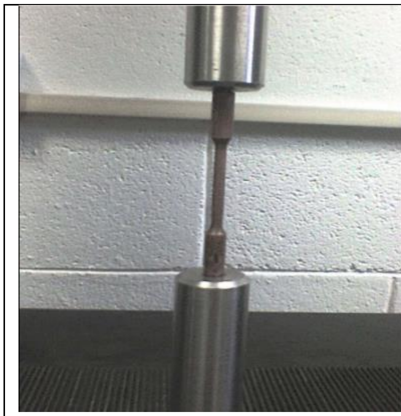
La primera ley de Tobler (1970) establece: *Todos los lugares están relacionados, pero lugares cercanos están más relacionadas que lugares distantes*.

La interpolación polinómica es empleada por cartógrafos para la creación de mapas de isolíneas, esto se refiere a que se tienen mediciones obtenidas de estaciones meteorológicas que se emplean para estimar patrones del clima.

La idea es que a partir de datos en puntos particulares, sea posible estimar el clima para todas las ubicaciones dentro de una región, y no sólo para aquellos puntos.

En general, a mayor número de puntos de muestreo, mayor será la precisión en la superficie interpolada, como es más probable que incluya ubicaciones cuyos valores son importantes para definir la superficie (por ejemplo, los picos y valles de la zona) la definición de la localización.

5° caso. Pruebas de ensayo mecánico



Una prueba de laboratorio consiste en aplicar sobre una probeta normalizada un esfuerzo axial de tracción (alargamiento) hasta producir una ruptura.
Un objetivo de la prueba, es medir la resistencia del material.
Para ello, se obtienen datos de la tensión que provoca una deformación en periodos de tiempo.

La interpolación permite, a partir de coordenadas discretas esfuerzo- deformación (x_i, y_i), obtener valores intermedios para obtener lecturas concretas en distintos tiempo.

¿Qué pasa si...?

Como se ha visto, la interpolación es un proceso de usar puntos con valores conocidos o en una muestra de puntos para estimar valores en puntos desconocidos.

A continuación, se presentan casos que se estudiarán en las siguientes secciones.

CASO 1

$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{y_i}$
0	x_0	y_0
1	x_1	y_1
2	x_2	**¿?**
3	x_2	y_3
4	x_4	y_4

Se dispone de una muestra de valores para la variable independiente x y la dependiente y. Sin embargo, se requiere estimar el valor de y_3 para la variable x_3.
Los métodos típicos de interpolación consideran este caso, por ejemplo, en la interpolación de Newton se construye una tabla de diferencias finitas hacia adelante.

CASO 2

i	x_i	y_i
0	x_0	y_0
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
3	x_3	**¿?**
4	x_4	y_4

i	x_i	y_i
4	x_5	y_5
3	x_4	y_4
2	x_3	**¿?**
1	x_2	y_2
0	x_1	y_1

En este caso, no se dispone del cuarto número. Aunque el dato faltante y_3 está dentro de los valores de la tabla, está en la segunda mitad.
Si se decide emplear la interpolación de Newton, se requiere hacer un proceso hacia atrás, es decir; de abajo hacia arriba.

Se puede realizar lo siguiente: Cambiar el orden en forma regresiva y resolver bajo el proceso de interpolación regular, o hacer un cambio de signos.

CASO 3.

i	x_i	y_i
0	x_1	**¿?**
1	x_2	y_2
2	x_3	y_3
3	x_4	y_4
4	x_5	y_5

Este caso corresponde a una extrapolación, un proceso de encontrar valores aproximados fuera de la tabla de datos.

CASO 4

i	x_i	y_i
0	x_0	y_0
1	**¿?**	y_1
2	x_2	y_2
3	x_2	y_3
4	x_4	y_4

i	y_i	x_i
0	y_0	x_0
1	y_1	**¿?**
2	y_2	x_2
3	y_3	x_2
4	y_4	x_4

En el caso, se disponen de todos los valores para *y*, pero para el valor que corresponde a x_1, se desconoce.

Debido a que existe una correspondencia biunívoca entre las variables dependientes e independientes, es posible “intercambiar variables”, esto es, *y=f(x)*, o bien, *x=f(y).*

Evidencia de aprendizaje 3.1

a. Investigar las diferencias entre interpolar y ajustar una curva

b. ¿Qué se entiende por interpolar? y ¿qué se entiende por aproximar?

FORO: Presenta a tus compañeros, al menos tres casos/aplicaciones del mundo real, donde se requiera de la interpolación y los nombres de los métodos usados para su solución.

NIVEL 2

Métodos de interpolación de Newton y de Lagrange

En los cursos elementales de matemáticas se estudian funciones de la forma *y=f(x)* en donde se conoce la expresión matemática que define a *f(x)* para determinar sus derivadas $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$, y el valor de la integral definida $\int_a^b f(x)dx$.

En estos mismos cursos se ve que el problema de la integración tiene serias dificultades, y que su solución está limitada a solo algunos casos particulares conocidos. Entre estos, se encuentran: la integración de polinomios, de fracciones racionales, de funciones trigonométricas y exponenciales directas e inversas, y de combinaciones sencillas de estas.

Fuera de estos casos, el problema en matemáticas no tiene solución, y no la tiene, no por falta de métodos de integración, sino porque es una verdadera imposibilidad matemática. En muchas ocasiones, la antiderivada de la función que se trata de integrar no puede expresarse en términos de funciones elementales.

En Ingeniería es frecuente tener que tratar con funciones que no son del tipo de las elementales, además que también es común enfrentarse a funciones definidas en forma tabular o gráficas de las que se desconoce su expresión analítica. Por ejemplo, la interpretación de datos obtenidos experimentalmente.

Si los resultados no se requieren con gran aproximación, se pueden resolver estos problemas, generalmente, usando técnicas gráficas, construyendo tangentes a las curvas trazadas en forma aproximada y estimando áreas bajo las mismas.

Sin embargo, hay casos en los que se requiere de una alta aproximación, y entonces para estos, existen varios métodos numéricos que los pueden resolver.

Estos métodos consisten básicamente en sustituir la función determinada por datos experimentales, por una expresión matemática complicada, por una función que se aproxime a los puntos que definen a esa, generalmente se usan funciones racionales enteras y en particular de primero, segundo y tercer grado.

Interpolación de Newton y diferencias finitas

Sea una función *y=f(x)* definida en forma tabular para la que no se conoce la expresión analítica de *f(x)*.

Supóngase que para los valores

$$x_0,$$
$$x_1 = x_0 + h,$$
$$x_2 = x_0 + 2h, \ldots$$
$$x_n = x_0 + nh$$

Todos ellos espaciados igualmente entre sí, de la variable independiente x, se conocen los correspondientes valores de $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la variable dependiente y. Estos valores se observan en la siguiente tabla, que es la que define a la función considerada.

$\boldsymbol{x_i}$	x_0	$x_1 = x_0 + h$	$x_2 = x_0 + 2h$	$x_3 = x_0 + 3h$	…	$x_n = x_0 + nh$
$\boldsymbol{y_i}$	y_0	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Se llaman **primeras diferencias hacia adelante**, a la diferencia entre dos valores consecutivos de y. En la tabla anterior, las primeras diferencias hacia adelante tienen un valor de:

$$a_0 = y_1 - y_0$$
$$a_1 = y_2 - y_1$$
$$a_2 = y_3 - y_2$$
$$\dots$$
$$a_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

Que se van a representar como Δy_i.

Las diferencias de las primeras diferencias se llaman segundas diferencias hacia adelante y para la tabla tienen el valor de:

$$b_0 = a_1 - a_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$
$$b_1 = a_2 - a_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$$
$$b_2 = a_3 - a_2 = y_4 - 2y_3 + y_2$$
$$b_{n-2} = a_{n-1} - a_{n-2} = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}$$

Que se van a representar como $\Delta^2 y_i$.

Las diferencias de las segundas diferencias son las terceras diferencias hacia adelante que se representan como $\Delta^3 y_i$, y tienen el valor de:

$$c_0 = b_1 - b_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$
$$c_1 = b_2 - b_1 = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1$$
$$c_2 = b_3 - b_2 = y_5 - 3y_4 + 3y_3 - y_2$$
$$\dots$$
$$b_{n-3} = b_{n-2} - b_{n-3} = y_n - 3y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-z}$$

Siguiendo este proceso, se definen las cuartas, quintas, etc. diferencias hacia adelante. Todas estas diferencias se pueden arreglar en una tabla, llamada de *diferencias finitas*.

En esta tabla se pone cada diferencia entre los dos elementos que la produce como se observa a continuación.

$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{y_i}$	$\Delta \boldsymbol{y_i}$	$\Delta^2 \boldsymbol{y_i}$	$\Delta^3 \boldsymbol{y_i}$
x_0	y_0			
		$a_0 = y_1 - y_0$		
			$b_0 = a_1 - a_0$	
				$c_0 = b_1 - b_0$
$x_1 = x_0 + h$	y_1			
$\vdots$	$\vdots$	$a_1 = y_2 - y_1$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$b_1 = a_2 - a_1$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$c_1 = b_2 - b_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$c_{n-3} = b_{n-2} - b_{n-3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$b_{n-2} = a_{n-1} - a_{n-2}$	
$\vdots$	$\vdots$	$a_{n-1} = y_n - y_{n-1}$		
$x_n = x_0 + h$	y_n			

A primera vista, parecería que el proceso de determinar diferencias es infinito, se presenta el desarrollo para mostrar que en realidad es finito.

Ejemplo. Sea la función, $y = ax^2 + bx + c$.

Se quiere demostrar que el proceso de interpolación es finito, es decir; termina en algún punto del mismo.

Solución

El valor inicial es: $x_k = x_o + kh$,
Así que, el punto x_{k+1}, tomará *k+1* pasos

$$x_{k+1} = x_o + (k+1)h$$

Luego, entonces,

$$x_{k+2} = x_o + (k+2)h$$

Por ende, los valores calculados y, serán:

$$y_k = a(x_o + kh)^2 + b(x_0 + kh) + c$$

Que al desarrollarse queda

$$y_k = a{x_o}^2 + 2kahx_o + k^2ah^2 + bx_o + kbh + c$$

Se proporcionan los demás términos

$$y_{k+1} = a[x_o + (k+1)h]^2 + b(x_0 + [k+1]h) + c$$
$$y_{k+2} = a[x_o + (k+2)h]^2 + b(x_0 + [k+2]h) + c$$

Observe que las primeras diferencias hacia adelante tienen el valor de

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = 2ahx_0 + bh + (2k+1)ah^2$$
$$\Delta y_{k+1} = y_{k+2} - y_{k+1} = 2ahx_0 + bh + (2k+3)ah^2$$

Y las segundas son:

$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = 2ah^2$$

En forma tabular, los resultados se resumen así:

X	y	$\Delta \boldsymbol{y}$	$\Delta^{\mathbf{2}} \boldsymbol{y}$
$\boldsymbol{x_k}$	y_k		
		$2ahx_0 + bh + (2k+1)ah^2$	
$\boldsymbol{x_{k+1}}$	y_{k+1}		$2ah^2$
		$2ahx_0 + bh + (2k+3)ah^2$	
$\boldsymbol{x_{k+2}}$	y_{k+2}		

Se observa que la segunda diferencia es una constante, ya no contiene al término x. Como las segundas diferencias finitas hacia adelante son constantes, pues no dependen de k, e iguales entre sí, las terceras y subsiguientes valdrán cero, y aquí termina el proceso.

Una conclusión es: El número de diferencias finitas donde se hace constante, indica el grado del polinomio del polinomio tratado.

~~Hasta aquí ha quedado resuelto el problema.~~

En este ejemplo, se ve que en un polinomio de grado dos, se llega hasta la diferencia de orden dos, estas son todas iguales entre sí, y las de orden superior son nulas. Por consecuencia lógica, se puede pensar que el grado de desarrollo de las diferencias es el mismo que el grado de polinomio, y esto se confirma para un polinomio de grado n.

Ejemplo. Obtener el grado del polinomio que puede representar al conjunto de valores de la siguiente tabla.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	2			
		6		
2	8		48	48
		54		
4	62		96	48
		150		
6	212		144	48
		294		
8	506		192	
		486		
10	992			

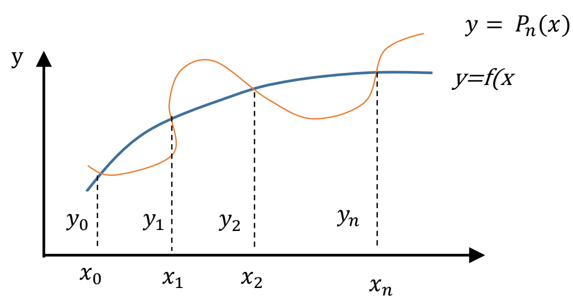
Como las terceras diferencias son constantes, el conjunto de valores está representado por un polinomio de grado 3. Se puede ver que los valores de y se tabularon del polinomio $y = x^3 - x + 2$.

Hasta aquí ha quedado resuelto el problema.

Dada la función *y=f(x)* definida en forma tabular, el problema de la interpolación consiste en encontrar el valor de la función *f(x)* para un valor x incluido entre dos valores consecutivos de la tabla

$$x_k < x < x_{k+1}$$

Se admite que la función *f(x)* se aproxima a un polinomio $P_n(x)$ de grado n que pasa por todos los puntos que definen la función como se ve en la figura.



De acuerdo con lo anterior, en la tabla de diferencias desarrollada, se tendrá que la diferencia de orden n es aproximadamente constante y por definición de diferencias hacia adelante, se tiene de esto que:

$$y_1 = y_0 + a_0 \qquad a)$$

$$y_2 = y_1 + a_1 = y_0 + 2a_0 + b_0 \qquad b)$$

$$y_3 = y_2 + a_2 = y_0 + 3a_0 + 3b_0 + c_0 \qquad c)$$

$$y_4 = y_3 + a_3 = y_0 + 4a_0 + 6b_0 + 4c_0 + d_0 \qquad d)$$

Siguiendo este mismo proceso, se tiene que

$$y_5 = y_4 + a_4 = y_0 + 5a_0 + 10b_0 + 10c_0 + 5d_0 + e_0 \qquad e)$$

Se observa que las expresiones a), b), c), d), y e), aparecen las primeras diferencias de órdenes sucesivas, a partir de y_0, efectuadas de los coeficientes del desarrollo del binomio de Newton y suponiendo que esto es verdadero para cualquier valor de y_k, y se puede establecer que

$$y_k = y_0 + ka_0 + \frac{k(k-1)}{2!}b_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}c_0 + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}d_0 + \cdots$$

Se puede hacer una analogía, con $a_0 = \Delta y_0$

$$b_0 = \Delta^2 y_0$$
$$c_0 = \Delta^3 y_0$$
$$d_0 = \Delta^4 y_0$$

Entonces,

$$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots$$

Lo cual, por inducción matemática, puede demostrarse que es verdadera para todo valor entero positivo de k.

Ahora bien, para valores racionales no enteros de k, se puede demostrar también que la expresión anterior proporciona valores aproximados al valor real de la función $f(x)$ para $x = x_k$, y esta aproximación será mayor mientras más cerca se encuentre del polinomio $P_n(x)$ o la función *f(x)*, como se puede ver en la gráfica.

Si la función *f(x)* es un polinomio, entonces la expresión anterior proporcionará resultados exactos.

La expresión desarrollada

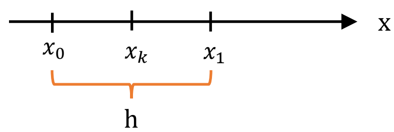
$$y_k = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots$$

recibe el nombre de **"Fórmula de interpolación de Newton"**, y como ya se dijo, es aplicable a cualquier valor de x_k correspondiente o no a la tabla.

En la tabla, y_k es un valor aproximado (interpolado) de la función obtenida $x = x_k$, donde y_0 es el valor inicial de y en la tabla, la cual se considera inmediato anterior al valor que se trata de interpolar.

Δy_0, $\Delta^2 y_0$, $\Delta^3 y_0$, $\Delta^4 y_0$,... son las diferencias delanteras de órdenes sucesivas correspondientes a y_0.

Con respecto a k, se puede determinar de la siguiente forma:



Donde $x_k = x_0 + kh$
Y por lo tanto,

$$k = \frac{x_k - x_0}{h}$$

Ejemplo. Para la función definida, determinar el valor de y para *x=3.2*

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	2			
		6		
2	8		48	48
		54		
4	62		96	48
		150		
6	212		144	48
		294		
8	506		192	
		486		
10	992			

Solución

Se tiene que

$$x_0 = 2;\ x_k = 3.2$$

$$h=2$$

$$y_0 = 8;\ \Delta y_0 = 54;\ \Delta^2 y_0 = 96; \Delta^3 y_0 = 48$$

$$k = \frac{x_k - x_0}{h} = \frac{3.2 - 2}{2} = 0.6$$

Así que sustituyendo en la Fórmula d Newton, se tiene:

$$y_{0.6} = 8 + (0.6)54 + \frac{0.6(0.6-1)}{2}(96) + \frac{0.6(0.6-1)(0.6-2)}{6}(48)$$

$$y_{0.6} = 31.568$$

Por lo tanto,

$$f(3.2) = 31.568$$

Es importante recalcar, que este valor debe ser el exacto de la función para *x=3.2* ya que, al ser las terceras diferencias constantes, la tabla corresponde a un polinomio.

~~Hasta aquí ha quedado resuelto el problema.~~

Si ahora lo que se quiere es interpolar un valor que se encuentre en la segunda mitad de la tabla, se puede demostrar, dado que ahora se recorre retrospectivamente dicha tabla, que la fórmula de interpolación de Newton queda:

$$y_k = y_0 - k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots$$

Esto es, se ha cambiado el signo de las diferencias de orden impar (primera, tercera, quinta, etc.), es decir; en la fórmula de interpolación de Newton, los signos alternan de más a menos, a más a menos, etc., y se tendría

$$y_k = y_n - k\Delta y_n + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_n - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_n + \cdots$$

Donde y_n sería el valor inmediatamente después de y_k, y las diferencias correspondientes $\Delta y_n, \Delta^2 y_n, \Delta^3 y_n, \ldots$ se localizan sobre la diagonal ascendente que parte de y_n, y así k se determina

$$k = \frac{x_n - x_k}{h}$$

Ejemplo. Para la función definida en el ejemplo anterior, localizar el valor de la función para *x=9*.

Solución

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	2			
		6		
2	8		48	48
		54		
4	62		96	48
		150		
6	212		144	48
		294		
8	506		192	
		486		
10	992			

$$k = \frac{10-9}{2} = 0.5$$
$$x_n = 10$$
$$x_k = 9; h = 2$$
$$y_n = 992;\ \Delta y_n = 486$$
$$\Delta^2 y_n = 192$$
$$\Delta^3 y_n = 48$$

$$y_{0.5} = 992 - 0.5(486) + \frac{0.5(0.5-1)}{2}(192) - \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{6}(48)$$
$$y_{0.5} = 772$$

Se tiene que

$$f(9) = 772$$

Hasta aquí ha quedado resuelto el problema.

Ejemplo. Para la función definida en el ejemplo anterior, localizar el valor de la función *x=7.8*

Solución

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	2			
		6		
2	8		48	48
		54		
4	62		96	48
		150		
6	212		144	48
		294		
8	506		192	
		486		
10	992			

$$k = \frac{8-7.8}{2} = 0.1$$

$$y_{0.1} = 506 - 0.1(294) + \frac{0.1(0.1-1)}{2}(144) - \frac{0.1(0.1-1)(0.1-2)}{6}(48)$$
$$f(7.8) = 468.752$$

Hasta aquí, se han calculado valores de y para una x dada entre dos valores de x_k de la tabla. A este proceso se le llama interpolación. Pero ahora se quiere calcular el valor de y para una x fuera del rango de valores de x_k en la tabla. A este proceso se le llama extrapolación.

Hasta aquí ha quedado resuelto el problema.

Ejemplo. Calcular el valor de la función para *x=-1* de la función definida en el ejemplo anterior.

Solución

Como no se tienen definidas las diferencias de la función para *x=-2,* habrá que determinarlas.

Para esto, aceptamos que las terceras diferencias son constantes e iguales a 48. Con la tercera diferencia conocida, se puede determinar la segunda, con esta se puede calcular la primera y con esta se calcula el valor de la función para *x=-2*. Observe la siguiente tabla.

Nota: Los números con asteriscos son los valores encontrados con el procedimiento señalado.
Ahora,

$$k=\frac{-1-(-2)}{2}=0.5$$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{Y}$	$\Delta \boldsymbol{y}$	$\Delta^2 \boldsymbol{y}$	$\Delta^3 \boldsymbol{y}$
-2	**-4**			
		6*		
0	2		**0***	
		6		**48***
2	8		48	48
		54		
4	62		96	48
		150		
6	212		144	48
		294		
8	506		192	
		486		
10	992			

$$y_{0.5}=-4+0.5(6)+\frac{0.5(0.5-1)}{2}(0)+\frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{6}(48)$$

Por lo que *f(-1)=2.*

Hasta aquí ha quedado resuelto el problema.

Recordar que en un polinomio de grado *n*, la n-ésima diferencia es constante. En cualquier otra función no ocurre lo mismo, y cuando más se puede aceptar que determinadas diferencias son aproximadamente para acercarse a un polinomio. En el caso de funciones logarítmicas ni siquiera eso ocurre, por lo que se debe admitir la aproximación que se hace a un polinomio de grado *n* a dichas funciones logarítmicas.

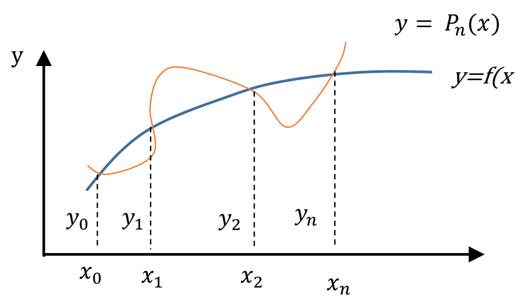
A esto se le llama *interpolación limitada* de grado *n*.

Hay que tener en cuenta que al efectuar esta aproximación de una función logarítmica a una función polinomial, el resultado no será exacto por lo que el error absoluto tendrá que ser evaluado por el analista.

Fórmula de Lagrange

La fórmula de interpolación de Newton se aplica a funciones definidas en forma tabular con valores de x igualmente espaciadas. Pero en muchas aplicaciones no es posible generar este tipo de tablas, sino que las lecturas obtenidas sobre la aplicación tienen lecturas que no son equidistantes, como se muestra en la siguiente figura.

Como se procedió anteriormente, se debe escoger un polinomio que pase por todos los puntos de la tabla dada para hacer la interpolación.



Es muy evidente que sí se tienen solo dos puntos, el polinomio que pasa por estos, es de grado uno (recta); si se tienen tres puntos, el polinomio es de segundo grado (parábola), y en el caso general de tener *n* puntos, como se ve en la tabla, el polinomio sería de grado *n-1*, o sea

$$y = a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x + a_{n-1}$$

Pero este polinomio también se puede escribir como

$$\begin{aligned} y = A_1(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \dots (x - x_n) + A_2(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) \dots (x - x_n) \\ + A_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) \dots (x - x_n) \dots \\ + A_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

El cual también es de grado *n-1*.

Los coeficientes de $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ se deben determinar, en tal forma que la gráfica del polinomio pase por todos y cada uno de los puntos definidos por la tabla anterior y que se observa en la gráfica adjunta a la tabla.

Entonces si en la expresión anterior se hace $x = x_1$, el valor de y será de y_1, o sea,

$$y_1 = A_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \dots (x_1 - x_n)$$

De manera que,

$$A_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \dots (x_1 - x_n)}$$

Si, $x = x_2$, entonces $y = y_2$, se tiene

$$y_2 = A_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \dots (x_2 - x_n)$$

Por lo que

$$A_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \dots (x_2 - x_n)}$$

Si, $x = x_3$, entonces $y = y_3$, se obtiene

$$y_3 = A_3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4) \dots (x_3 - x_n)$$

Al despejar A_3,

$$A_3 = \frac{y_3}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4) \dots (x_3 - x_n)}$$

Procediendo de la misma forma se obtienen los demás coeficientes del polinomio. El último se obtiene haciendo

$$y_n = A_n(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3) \dots (x_n - x_{n-1})$$

De lo cual se genera

$$A_n = \frac{y_n}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3) \dots (x_n - x_{n-1})}$$

Sustituyendo estos coeficientes en la primera expresión se llega finalmente a

$$y = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \dots (x_1 - x_n)} y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) \dots (x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \dots (x_2 - x_n)} y_2$$

$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) \dots (x - x_n)}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4) \dots (x_3 - x_n)} y_3 + \cdots \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3) \dots (x_n - x_{n-1})} y_n$$

Esta expresión recibe el nombre de **Fórmula de Lagrange**.

Se observa en la expresión de Lagrange que $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \ldots (x_n, y_n)$ son las coordenadas de los puntos que definen la función tabular y "y" es el valor de esta función para un valor dado de x.

Se puede demostrar que, si los valores de *x* están igualmente espaciados, la fórmula es coincidente con la de Newton.

Ejemplo. Dada la siguiente función tabular, encontrar el valor *y* para *x=2*.

X	***y***
0	2
1	3
4	18
6	38

Solución

Existen 4 puntos, con lo que al aplicar la fórmula de Lagrange se tiene:

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}y_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_2)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}y_3 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}y_4$$

Sustituyendo los valores de la tabla se tiene:

$$y = \frac{(2-1)(2-4)(2-6)}{(0-1)(0-4)(0-6)}(2) + \frac{(2-0)(2-4)(2-6)}{(1-0)(1-4)(1-6)}(3) + \frac{(2-0)(2-1)(2-6)}{(4-0)(4-1)(4-6)}(18)$$

$$+\frac{(2-0)(2-1)(2-4)}{(6-0)(6-1)(6-4)}(38)$$

De aquí que el resultado sea

f(2)=6

Hasta aquí ha quedado resuelto el problema.

Ejemplo. Obtener el valor de *y* para *x=3.2* de la siguiente función.

x	y
0	2
2	8
4	62
6	212
8	506
10	992

Solución

Aplicando la fórmula de Lagrange, ya con restas aplicadas, se obtiene

$$y=\frac{(1.2)(-0.8)(-2.8)(-4.8)(-6.8)}{(-2)(-4)(-6)(-8)(-10)}(2)+\frac{(3.2)(-0.8)(-2.8)(-4.8)(-6.8)}{(2)(-2)(-4)(-6)(-8)}(8)$$
$$+\frac{(3.2)(1.2)(-2.8)(-4.8)(-6.8)}{(4)(2)(-2)(-4)(-6)}(62)$$
$$+\frac{(3.2)(1.2)(-0.8)(-4.8)(-6.8)}{(6)(4)(2)(-2)(-4)}(212)$$
$$+\frac{(3.2)(1.2)(-0.8)(-2.8)(-6.8)}{(8)(6)(4)(2)(-2)}(506)$$
$$+\frac{(3.2)(1.2)(-0.8)(-2.8)(-4.8)}{(10)(8)(6)(4)(2)}(992)$$
$$y=\frac{87.73632}{-3840}(2)+\frac{233.96352}{768}(8)+\frac{-350.94528}{-384}(62)+\frac{-100.27008}{384}(212)$$
$$+\frac{-58.49088}{-768}(506)+\frac{-91.28768}{3840}(992)$$

$$y=31.568$$

O sea *f(3.2)=31.568.* Este resultado es idéntico al obtenido con la fórmula de Newton, lo que comprueba que la fórmula de interpolación de Lagrange coincide con la de Newton, cuando los valores de la variable independiente están espaciados igualmente.

Hasta aquí ha quedado resuelto el problema.

REVISA EL EJECUTABLE DE LAGRANGE

Evidencias de aprendizaje

En el mundo académico, normalmente, se proporciona una función algebraica

y=f(x)

Dada esa función, se pide calcular valores de la variable dependiente, tomándolas a partir de las variables independientes.

En el mundo real, el proceso es al revés: De los datos obtenidos de un experimento o un proceso, se genera una tabla de valores, de la cual muchas veces se necesita conocer a qué función matemática pertenece.

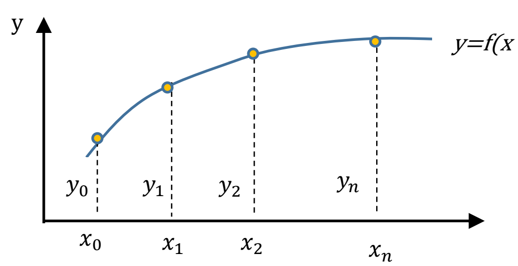
x	x_0	x_1	x_2	…	x_n
y	y_0	y_1	¿?	…	y_n

Por interpolación se entiende estimar el valor desconocido de una función también desconocida en un punto, esto es ¿cuánto "vale" el valor aproximado de "y", a partir de "x", o viceversa, si se desconoce la función?

Así que la interpolación, como método numérico, genera una medida ponderada de sus valores conocidos en puntos cercanos al punto dado.

También, la interpolación resuelve el problema referido a encontrar un polinomio que pase por puntos dados (x_i, y_i), a los cuales ubica como nodos.

Esto es, permite a partir de los puntos dados, encontrar una función aproximada (un polinomio) que defina al fenómeno, y que pasa exactamente por esos puntos. De tal forma que se puede conocer parte del comportamiento de la función desconocida de *f(x)*.



Las actividades que resolverás a continuación, corresponden a problemas típicos de estimar valores intermedios entre puntos asociados con datos, según los casos presentados en el nivel 1.

Lee con atención los casos y elige la respuesta correcta.

Evidencia de aprendizaje 3.2

3.2a Construir una tabla de diferencias finitas, tomando en cuenta el siguiente conjunto de valores:

X	***y***
0	625
2	81
4	1
6	1
8	81
10	625
12	2401

i. La última diferencia finita es 384	ii. La última diferencia finita es 381	iii. La última diferencia finita es 385

3.2b ¿Qué interpretación se le asigna al último valor de la diferencia finita?, ¿cómo podría ser el polinomio de interpolación?

3.2c Con el mismo conjunto de valores dados, construye la tabla de diferencias finitas para el valor de *x=14*

X	***y***
0	625
2	81
4	1
6	1
8	81
10	625
12	2401
14	¿?

Nota: Se requiere que se realice una interpolación hacia atrás con la tabla de diferencias finitas.

i. Cuando *x=14, y=6561*	ii. Cuando *x=14, y=6563*	iii. Cuando *x=14, y=6559*

Evidencia de aprendizaje 3.3

Con el propósito de reforzar tu aprendizaje, se presenta otro ejercicio similar al anterior.

Construir una tabla hasta la cuarta diferencia finita, tomando en cuenta el siguiente conjunto de valores:

X	*y*
1	4
2	13
3	34
4	73
5	136

3.3a ¿Cuál es el valor final?, y ¿qué significa?

Evidencia de aprendizaje 3.4

Por definición, una primera diferencia finita está dada por

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$$

Tomando en cuenta la definición, encuentre el resultado de la primera diferencia finita para Δe^{ax}

Realiza el análisis y operaciones necesarias. Elige la respuesta correcta.

i. El resultado es $\Delta e^{ax} = e^{ax_0}(e^{a(k+1)h} - e^{akh})$	ii. El resultado es $\Delta e^{ax} = e^{ax}[e^{ah} - 1]$	iii. El resultado es $\Delta e^{ax} = e^{ax} + 1$

Evidencia de aprendizaje 3.5

3.5a La siguiente tabla muestra el punto de fusión de una aleación de plomo y zinc, θ es la temperatura en grados centígrados y x es el porcentaje de carga.

Encontrar el valor de θ, cuando *x=43.*

x	40	50	60	70	80	90
θ	184	204	226	250	276	304

Realizar los cálculos por medio del método de Lagrange.

i.	ii.	iii.
y=189.79	*y*= 286.96	*y=350.87*

3.5b Realiza un programa en Excel para calcular el valor de seno 520°, mediante el método de interpolación de Newton.

x	450	500	550	600
y=seno x	1	0.6427	-0.1736	-0.8660

Nota: Se sugiere se trabaje en grados

Sube tu programa

Evidencia de aprendizaje 3.6

¿Cuándo es conveniente usar interpolación de Newton, y cuándo de Lagrange**?**

BIENVENIDO AL NIVEL 3

En este nivel se integran tus conocimientos del nivel 1 y 2 y para ello, requieres poner en práctica tu **pensamiento estratégico.** En esta sección te ayudaremos a desarrollarlo.

Conceptualización del pensamiento estratégico en métodos numéricos

La figura se refiere a realizar actividades desde plantear un fin, analizar los medios con los que se cuenta, hasta la interpretación de resultados. Justamente, en esta sección te presentaremos ejemplos.

Ejemplos de aplicación

Situación del problema y Organización de la información…

El número de bacterias por unidad de volumen existentes en una incubación después de "x" horas es representado en la siguiente tabla:

Relación de Horas – Volumen de Bacterias.						
Horas	0	1	2	3	3.5	4
Volumen de Bacterias	30	48	67	91	¿?	135

Determinar el volumen de bacterias en 3.5 horas.

Planteamiento del problema

Un modelo matemático es una representación de un fenómeno o una situación. Se llama modelo matemático, cuando se expresa en lenguaje formal, que puede ser manipulable algebraicamente. Estos se utilizan para expresar cantidades, variables, proporciones, tablas, etc. A grandes rasgos, permite expresar toda cantidad física tangible e intangible en unidades algebraicas, esto ayuda a abstraer aspectos físicos del entorno en algo matemático y manipulable.

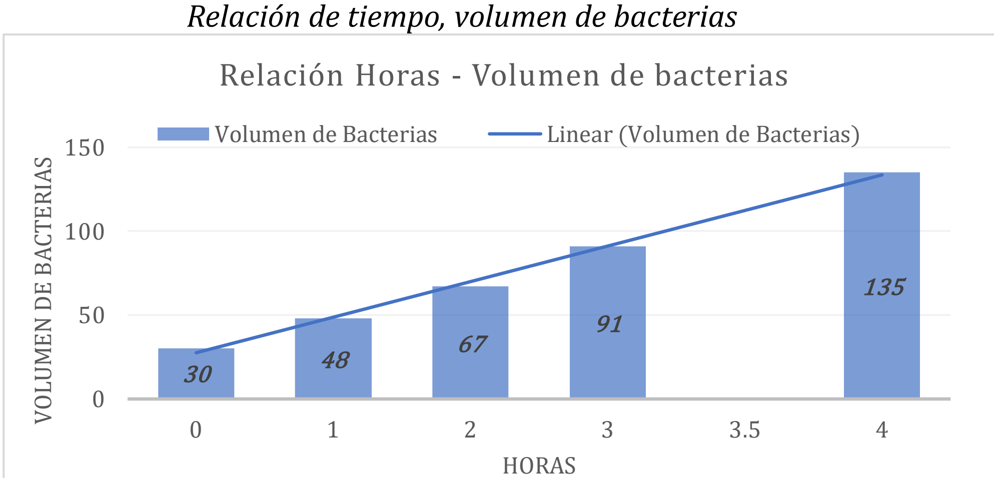
El planteamiento del problema se refiere a la estructuración de la información. En cierta forma, ayuda a delimitar el alcance que tiene y las variables que se deben considerar, así como el camino que se debe de tomar para poder darle solución.

En este problema un grupo de científicos incuba una cantidad de bacterias, con el fin de obtener datos específicos como puede ser el tiempo de reproducción, la cantidad de bacterias obtenidas al cabo de ciertas horas de incubación, etc.
En este caso, los científicos han tomado muestras de la incubación de las bacterias cada hora y se ha llevado un registro de cuantas bacterias se han desarrollado por cada hora, pero ahora quieren saber cuántas bacterias se han desarrollado al cabo de 3.5 horas desde el inicio del experimento.

Análisis del modelo matemático

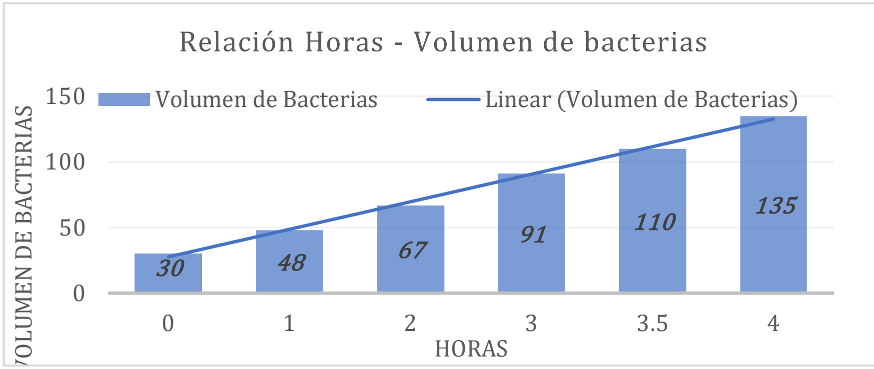
A continuación, se muestra un gráfico con los datos obtenidos, y poder hacer una aproximación de la cantidad de bacterias que pudieran estar en las 3.5 horas y así entender de una forma más visual lo que se plantea:

Relación de tiempo, volumen de bacterias



En el gráfico se observa una tendencia positiva del volumen de bacterias. Se empíricamente se genera un número ajustado, la gráfica ahora se mostraría de la siguiente forma.

Aproximación empírica del resultado



Haciendo esta aproximación, se puede ver que podrían existir 110 bacterias después de 3.5hrs, pero en realidad, esta aproximación es errónea, ya que no tiene ningún sustento más que seguir la línea de tendencia del gráfico.

Los métodos numéricos de solución

Se aplicarán distintos métodos de interpolación.

Interpolación Lineal:

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \ldots (3.2)$$

Donde:

$x_0 = 3$	$x = 3.5$	$x_1 = 4$
$f(x_0) = 91$	$f_1(x) = ¿?$	$f(x_1) = 135$

Una vez identificados los valores que se tienen y que corresponden en la fórmula, se aplica la interpolación sustituyendo los valores:

$$f_1(x) = 91 + \frac{135 - 91}{4 - 3}(3.5 - 3) = 113$$

Relación horas-volumen de bacterias con dato interpolado						
Horas	0	1	2	3	3.5	4
Volumen de bacterias	30	48	67	91	***113***	135

Método de Newton: Una estrategia para mejorar la estimación consiste en introducir alguna curvatura a la línea que une los puntos: Si se tienen tres puntos como datos, éstos pueden ajustarse en un polinomio de segundo grado (también conocido como parábola).

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\Delta \boldsymbol{y}$	$\Delta^2 \boldsymbol{y}$	$\Delta^3 \boldsymbol{y}$
0	*30*			
1	48	18		
2	67	19	1	
3	91	24	5	4
4	135	44	20	15

$$f(x) = 30 + 18(x-0) + \frac{1}{2}(x-0)(x-1) + \frac{2}{3}(x-0)(x-1)(x-2) + \frac{11}{24}(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)$$

Simplificando:

$$f(x) = \frac{11x^4 - 50x^3 + 85x^2 + 386x}{24} + 30$$

$$f(x) = 109.13$$

Método de Lagrange:

$$f_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

$$P(x) = 30\left[\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{24}\right] + 48\left[-\frac{(x-0)(x-2)(x-3)(x-4)}{6}\right] + 67\left[\frac{(x-0)(x-1)(x-3)(x-4)}{4}\right] + 91\left[-\frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-4)}{6}\right] + 135\left[\frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}{24}\right]$$

Simplificando:

$$P(x) = \frac{11x^4 - 50x^3 + 85x^2 + 386x + 720}{24}$$

Por lo tanto, con el método de Lagrange se determina que pasadas las 3.5hrs de la incubación, existen 109.13 bacterias.

~~Hasta aquí ha quedado resuelto el problema…~~

Al comparar los métodos, se puede observar que se llega casi a los mismos resultados, pero cada uno con leves diferencias, siendo más exactos el método de Newton y Lagrange:

Comparación de los resultados de los 3 métodos propuestos			
	Interpolación Lineal	***Interpolación de Newton***	***Interpolación de Lagrange***
Volumen de bacterias en 3.5 horas	*113*	*109.13*	*109.13*

Notas Adicionales…

Existen distintos software en donde se pueden resolver cada tipo de interpolación, se deja a su disposición una herramienta en Excel para que pueda realizar la interpolación y se encuentre el polinomio interpolador propuesto de este ejercicio, puede usarse para distintos problemas.

Polinomio
Interpolador_v2.xlsx

Si se tiene problemas con la simplificación de las ecuaciones, se puede utilizar el siguiente enlace para verificar la resolución de las ecuaciones a su máxima simplificación: https://es.symbolab.com/solver

¡Ahora es tu turno!

Actividades de aprendizaje

Evidencia de aprendizaje 3.6

Toma en cuenta el ejemplo del crecimiento de bacterias. Elige la respuesta correcta.

Relación de Horas – Volumen de Bacterias.						
Horas	0	1	2	3	3.5	4
Volumen de Bacterias	30	48	67	91	¿?	135

3.6a Obtener la cantidad de bacterias pasados 30min. (Utilizar Interpolación Lineal)

i.	***ii.***	***iii.***
$f(x) = 39\ bacterias$	$f(x) = 38\ bacterias$	$f(x) = 40\ bacterias$

3.6b Obtener la cantidad de bacterias pasados 90min. (Utilizar Interpolación Lineal).

a)	***b)***	***c)***
$f(x) = 57.5\ Bacterias$	$f(x) = 57\ Bacterias$	$f(x) = 56.3\ Bacterias$

3.6c ¿Se podrían obtener los datos faltantes si únicamente se tuvieran los siguientes datos? Justifique su respuesta.

Tabla 3.4 Relación de Horas – Volumen de Bacterias.					
Minutos	0	15	30	45	60
Volumen de Bacterias	30				48

3.6d ¿Cuál es la función que describe el comportamiento de la incubación de bacterias? (Utilizar Interpolación deLagrange).

3.6e ¿Qué valor se obtendría en los minutos 15, 30 y 45 de la Tabla 3.4? (Utilizar Interpolación de Lagrange)

i.	***ii.***	***iii.***
$f(15) = 34.5$ $f(30) = 39$ $f(45) = 43.5$	$f(15) = 34$ $f(30) = 39$ $f(45) = 43.5$	$f(15) = 34.5$ $f(30) = 39$ $f(45) = 43$

3.6f Elaborar una gráfica de barras mostrando los resultados obtenidos con la tabla original y los datos interpolados por Lagrange.

Evidencia de aprendizaje 3.7

En una planta automotriz, desea diseñar un nuevo vehículo todo terreno, esta tiene un proveedor específico de amortiguadores, al cual le encarga fabricar un amortiguador que soporte $\mathbf{17}\boldsymbol{KPA} \pm \mathbf{5}\boldsymbol{KPA}$ sin superar una contracción de $330mm$. El proveedor para ahorrar costos de producción, toma los datos que alguna vez le hicieron a uno de sus amortiguadores, como se aprecia a continuación:

Relación de Carga – Contracción					
Carga [KPA]	5	10	15	20	25
Contracción [mm]	49	105	172	253	352

Resolver lo que se pide.

3.7a Hallar el modelo matemático que se ajusta a las contracciones correspondientes a los datos que se obtuvieron en aquellas mediciones.

3.7b Determinar la contracción del amortiguador con una carga de 17 KPA

i.	*ii.*	*iii.*
$f(17) = 202.52mm$	$f(17) = 200mm$	$f(17) = 195.32mm$

3.7c Determinar la contracción del amortiguador con una carga de 22 KPA

i.	*ii.*	*iii.*
$f(22) = 290.18mm$	$f(22) = 291.18mm$	$f(22) = 289.18mm$

3.7d Determinar la contracción del amortiguador con una carga de 12 KPA

i.	*ii.*	*iii.*
$f(12) = 130.33mm$	$f(12) = 131.33mm$	$f(12) = 132.33mm$

R = 130.33mm

3.7e Para obtener una contracción de 330mm ¿Cuántos KPa son requeridos?

i.	*ii.*	*iii.*
23.97459 KPa	23.9801 KPa	23.96988 KPa

3.7f De los casos resueltos, ¿El proveedor puede venderle a la planta automotriz cualquiera de los amortiguadores? Justifique su respuesta.

3.7g Elaborar una gráfica de barras mostrando los resultados obtenidos.

NIVEL 4.

Tu proyecto

En este nivel se requiere de una investigación, tiempo para pensar y analizar las múltiples partes del problema.
Demanda de tu parte asertividad y perseverancia.

Evidencia de aprendizaje

Proyecto
Tomar en cuenta la evidencia de aprendizaje 3.5 y con base en el problema ahí descrito, elaborar un programa de computadora en un lenguaje de uso general (el que tú conozcas) para resolver el caso en

Interpolación de Newton
Interpolación de Lagrange

Te sugerimos visites las siguientes páginas
https://www.youtube.com/watch?v=oz5G3XDVkwc
https://www.youtube.com/watch?v=9m7CutqZPtc
https://www.youtube.com/watch?v=2nju-o6t3kQ

4.7a Construir el pseudocódigo y diagrama de flujo para los dos métodos (te recomendamos ampliamente usar la aplicación de lucid chart).

4.7b Generar el programa fuente y presentar el programa ejecutable para los tres métodos (Ingeniería en Computación)

4.7b Realizar una tabla comparativa con las características de los dos métodos, tomando en cuenta el concepto de error (Ingeniería Civil, Ingeniería Eléctrica Electrónica, Ingeniería Industrial, Ingeniería Mecánica).

¿No te fue bien en alguno de los niveles?, ¿Crees que puedes mejorar su nivel de aprendizaje?, ¿simplemente quieres seguir experimentando?... Bienvenido a "**Ponte a prueba**"

Test de reposición

Bienvenido a la siguiente prueba sobre el tema "Integración numérica".
Lee con atención y contesta lo que se te solicite.

1. ¿Cuáles son las ventajas de usar la interpolación de Newton, con respecto a la Interpolación de Lagrange?

2. Te encuentras explicando a tu compañero(a) que no fue a clase, acerca de la Interpolación de Lagrange (a) ¿Qué dirías sobre este tipo de interpolación? (b) ¿Qué dirías de su error?

3. Expresa con un pseudocódigo como se obtiene una fórmula analítica a partir de una tabla de diferencias finitas.

4. Encontrar el valor de *y*, cuando *x=0.47*.

x:	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y:	1.0000	1.1103	1.2428	1.3997	1.5836	1.7974

5. Los siguientes datos corresponden a valores consecutivos, donde 23.6 es el sexto término. Encontrar los valores del primero y décimo término de la serie.

x:	3	4	5	6	7	8	9
y:	4.8	8.4	14.5	23.6	36.2	52.8	73.9

6. ¿Cuáles son las ventajas de usar la interpolación de Lagrange, con respecto a la de Newton?

7. Genera una tabla en donde se muestre cómo se aplican los conceptos de error en interpolación:

   a. Error inherente
   b. Error por redondeo

c. Error de truncamiento
d. Error relativo

8. Genera un programa para realizar una tabla de diferencia finitas hasta el grado cuarto ($\Delta^2 y$).

9. La siguiente tabla muestra estudiantes y sus pesos. Encontrar el número de estudiantes que están entre 60 y 70 kilogramos.

Peso (Kg):	0-40	40-60	60-80	80-100	100-120
Número de estudiantes	250	120	100	70	50

10. Encuentre el polinomio cúbico que pasa por los puntos:

X	0	1	2	3
f(x)	1	2	1	10

Preguntas de reflexión

Lee con atención las preguntas, y contesta lo que se te pide.

1. ¿Cuáles fueron las principales ideas o conceptos matemáticos que aprendieron durante el desarrollo de la unidad?

2. ¿Qué preguntas tienes aún sobre los métodos usados en la unidad?

3. Describe un error o malinterpretación que algún compañero tuvo con el estudio de este tema.

4. ¿Qué nuevo vocabulario aprendiste? Genera una oración con esos términos.

5. ¿Qué fortalezas y debilidades notas de esta forma de evaluar el aprendizaje?

6. ¿Qué TIC emplearon para el desarrollo del proyecto?

7. ¿Los problemas propuestos son modelos reales que te preparan para tu futuro profesional?

Rúbrica de evaluación

La rúbrica que a continuación se presenta, se orienta a evaluar el aprendizaje en términos de qué tan profundo se ha comprendido el contenido presentado, con el fin de interactuar con este en forma exitosa.

Comprende 4 niveles de comprensión. El nivel 1, se orienta a la reproducción y memorización de un hecho, término, principio, concepto, así como a la ubicación de detalles. Puede llegar hasta la solución de problemas rutinarios no complejos.

El nivel 2 trata con la aplicación de habilidades y conceptos. Se trata de organizar y mostrar información. Interpretar gráficos, resumir, identificar las ideas principales, explicar relaciones. Hacer uso de la información, del conocimiento conceptual que conlleva a seleccionar el procedimiento básico apropiado para una tarea dada, tomar decisiones y resolver.

El nivel 3, es una naturaleza estratégica. Requiere razonamiento o desarrollo de un plan o secuencia de pasos para aproximarse al problema, requiere toma de decisiones. Se trata de hacer justificaciones en cada etapa de resolución de problemas y de presentar evidencia de lo mismo.

El nivel 4, tiene que ver con la creación. Puede ser una investigación y/o aplicación de un problema del mundo real. Requiere tiempo para investigar y para resolver problemas no rutinarios. La resolución del problema requiere visualizar múltiples condiciones, además de hacer manipulaciones no rutinarias. Sintetizar información en forma interdisciplinaria, ya sea con contenidos, áreas, fuentes, etc.

La rúbrica se presenta por niveles.

Para el nivel 1 el estudiante debe cumplir con una meta de aprendizaje para acceder al nivel 2.
Si el estudiante cumple con dos puntos accede al nivel 2 con las recomendaciones pertinentes que realice el profesor.

Nivel de comprensión1	Evidencia de aprendizaje	Puntaje
Distingue el concepto de uso de interpolación en la vida real	3.1a, 3.1b	2

Con un puntaje mayor que 5, el alumno puede continuar con el nivel 3.
Cada rubro tiene un valor de un punto.

Nivel de comprensión 2	Evidencia de aprendizaje	Puntaje
Construye una representación que muestra como se ve y/o funciona un fenómeno/situación	3.2a	1
Aplica un método numérico en una aplicación rutinaria	3.2b, 3.2c, 3.3, 3.5a	4
Clasifica una serie de etapas y decide por un método numérico	3.4, 3.5b	2
Escribe una explicación de un tópico para otros	3.6	1

Con un puntaje igual o mayor a 7, el alumno puede continuar con el nivel 4.
Cada rubro tiene un valor de un punto.

Nivel de comprensión 3	Evidencia de aprendizaje	Puntaje
Explica y conecta ideas, usando evidencia que lo sustente	3.6a, 3.6b	2
Construye una representación que muestra como se ve y/o funciona un caso	3.6c, 3.6d, 3.6e, 3.7g	4
Cita evidencia y desarrolla un argumento lógico para hacer conjeturas.	3.7a	1
Resuelve el problema y analiza escenarios distintos	3.7b, 3.7c,3.7d, 3.7e, 3.7f	5

Nivel de comprensión 4	Evidencia de aprendizaje	Puntaje
Sintetiza ideas en nuevas representaciones (diagrama de flujo detallado)	4.7a	3
Escribe el código fuente y presenta el ejecutable-Ingeniería en Computación	4.7b	1

Realiza un análisis comparativo: Ingeniería Civil, Industrial, Mecánica, Eléctrica-Electrónica	4.7b	1